

Régularisation parcimonieuse pour le problème d'intégration en traitement d'images

Hicham Badri

Hussein Yahia

INRIA Bordeaux Sud-Ouest
200, Avenue de la Vieille Tour - 34405 Talence
{hicham.badri, hussein.yahia}@inria.fr

Résumé

La reconstruction d'une surface ou image à partir d'un champ de gradient corrompu est une étape primordiale dans plusieurs applications en traitement d'images. Un tel champ peut contenir du bruit et des données aberrantes qui nuisent à la qualité de la reconstruction. On propose dans ce papier d'utiliser la parcimonie pour régulariser le problème, ainsi qu'une méthode efficace pour estimer une bonne solution du problème d'optimisation qui en résulte. Les expériences montrent que la méthode proposée permet d'améliorer considérablement la qualité de la reconstruction comparée aux méthodes précédentes.

Mots Clef

Intégration, parcimonie, optimisation.

Abstract

Image/surface reconstruction from corrupted gradient fields is an important step in many imaging applications. Noise and outliers in this field can result in a low-quality reconstruction. We propose in this paper to use sparsity to regularize the problem. We use an efficient minimization strategy to estimate a good solution of the corresponding optimization problem. Experiments show that the proposed method significantly improves the quality of reconstruction.

Keywords

Integration, sparsity, optimization.

1 Introduction

Le problème d'intégration à partir d'un champ corrompu apparaît dans plusieurs applications en traitement d'images. Par exemple, la reconstruction de surfaces via la stéréo-photométrie [1] ou à partir d'ombrages [2] requière des outils d'intégration robustes au bruit et aux données aberrantes. La présence de ces perturbations dans le champ estimé à partir de ces techniques peut avoir un grand impact sur la qualité de la reconstruction des surfaces. Plusieurs applications se basent sur le traitement dans le domaine du gradient [3, 4, 5]. Dans ce cas, la manipulation du gradient produit un champ non-intégrable. La reconstruction de l'image finale via une technique d'intégration naïve

peut produire plusieurs artéfacts. La technique présentée dans ce papier traite le problème d'intégration via une technique d'optimisation à base de parcimonie. Contrairement aux méthodes précédentes [6, 8, 9, 10, 12], on considère la parcimonie de deux manières : 1) un terme parcimonieux non-convexe pour renforcer la robustesse aux données aberrantes, 2) un terme parcimonieux non-convexe dans le domaine du gradient utilisé comme information a priori. On propose un solveur efficace à base d'optimisation alternée pour estimer rapidement une bonne solution du problème d'optimisation.

2 Travaux antérieurs

Les premiers travaux concernant le renforcement d'intégrabilité remontent aux approches de Chellappa et al. [6, 7] pour le problème de reconstruction de surface à partir d'ombrages. La reconstruction via l'équation de Poisson [6] est probablement la technique la plus populaire. Cette approche consiste à supposer que le gradient résiduel suit une loi Gaussienne, ce qui revient à utiliser la norme l_2 . Le problème est quadratique et donc admet une solution unique et simple. Cependant, la norme l_2 ne permet pas de supporter la présence de données aberrantes, ce qui peut produire des surfaces déformées. Un exemple est donné dans la Figure 1. La méthode de Frankot-Chellappa [7] projette le champ non-intégrable dans une base de Fourier. La méthode a été étendue aux bases non-orthogonales comme les shapelets [16]. Agrawal *et al.* proposent un framework général pour étendre l'équation de Poisson [10]. Une autre méthode par Agrawal *et al.* [11] consiste à utiliser une approche algébrique pour corriger les données aberrantes. Cependant, cette technique n'est robuste que si le champ ne contient pas de corruption dense. Pour mieux gérer les données aberrantes, des techniques à base de norme l_1 ont été proposées. La méthode [8] pose le problème en tant que correction du gradient résiduel sous contrainte de rotationnel nul. La méthode [9] cherche la meilleure solution en minimisant l'erreur sur le gradient résiduel via la norme l_1 . La méthode proposée utilise une norme non-convexe ($l_{p<1}$) sur le gradient résiduel, ce qui permet de mieux gérer les données aberrantes [18]. Une régularisation via la parcimonie dans le domaine du gradient est aussi considérée pour

produire une surface/image plus lisse.

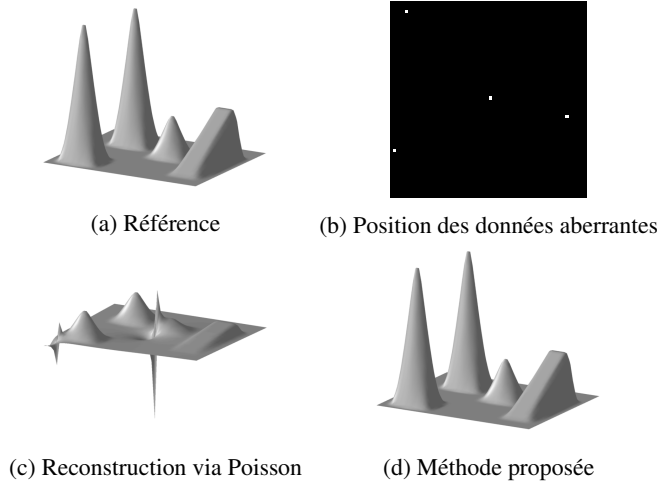


FIGURE 1 – Effet des données aberrantes aléatoires sur la reconstruction. Comme on peut le constater, même la présence de peu de données aberrantes produit une surface déformée via la méthode de Poisson (c). La méthode proposée est plus robuste et produit une surface de qualité supérieure (d).

3 Énoncé du problème

Soit $S(x, y)$ la surface qu'on désire retrouver. On note par s sa version vectorisée de longueur n . Soit $\vec{v} = (p, q)$ le champ non-intégrable mesuré et $\nabla s = (s_x, s_y)$ le gradient de S . Le problème d'intégration consiste à retrouver s à partir de \vec{v} formulé comme suit :

$$\hat{s} = \underset{s}{\operatorname{argmin}} \phi_r(\nabla s - \vec{v}), \quad (1)$$

où ϕ_r représente la norme sur le gradient résiduel. $\phi_r = \|\cdot\|_2^2$ [6] et $\phi_r = \|\cdot\|_1$ [8, 9] sont des cas spéciaux. La méthode proposée se base sur la formulation suivante :

$$\underset{s}{\operatorname{argmin}} \|\nabla s - \vec{v}\|_{p_1}^{p_1} + \lambda \|\nabla s\|_{p_2}^{p_2}, \quad (2)$$

où $p_1, p_2 \leq 1$ représentent la norme l_p et λ est un terme de régularisation positif. La parcimonie sur le gradient résiduel permet d'améliorer la robustesse aux données aberrantes, tandis que la parcimonie dans le domaine du gradient force la surface/image à être lisse, ce qui améliore la qualité de la reconstruction. L'utilisation de la norme l_p rend le problème (2) difficile à résoudre. Le problème est même non-convexe pour $p_1 < 1$ ou $p_2 < 1$. On utilise une technique à base d'optimisation alternée pour estimer progressivement une solution [13]. L'approche consiste à introduire des termes intermédiaires w_1 et w_2 :

$$\underset{s, w_1, w_2}{\operatorname{argmin}} \left\{ \|w_1\|_{p_1}^{p_1} + \frac{\beta}{2} \|(\nabla s - \vec{v}) - w_1\|_2^2 \right\} + \lambda \left\{ \|w_2\|_{p_2}^{p_2} + \frac{\beta}{2} \|\nabla s - w_2\|_2^2 \right\}, \quad (3)$$

et décomposer le problème en sous-problèmes plus faciles à résoudre :

$$\begin{aligned} (sp_1) : w_1^{(k+1)} &\leftarrow \underset{w_1}{\operatorname{argmin}} \|w_1\|_{p_1}^{p_1} + \frac{\beta}{2} \|w_1 - (\nabla s^{(k)} - \vec{v})\|_2^2 \\ (sp_2) : w_2^{(k+1)} &\leftarrow \underset{w_2}{\operatorname{argmin}} \|w_2\|_{p_2}^{p_2} + \frac{\beta}{2} \|w_2 - \nabla s^{(k+1)}\|_2^2 \\ (sp_3) : s^{(k+1)} &\leftarrow \underset{s}{\operatorname{argmin}} \|\nabla s - (\vec{v} + w_1^{(k+1)})\|_2^2 \\ &\quad + \lambda \|\nabla s - w_2^{(k+1)}\|_2^2, \end{aligned} \quad (4)$$

où β est un paramètre de régularisation positif.

3.1 Problèmes (sp_1) et (sp_2)

Les problèmes (sp_1) et (sp_2) prennent la forme proximale [14] suivante :

$$\operatorname{prox}_{\frac{1}{\beta} l_p}(z) = \underset{w}{\operatorname{argmin}} \|w\|_p^p + \frac{\beta}{2} \|w - z\|_2^2. \quad (5)$$

Ce problème est non-convexe pour $p < 1$ mais admet une estimation au premier ordre :

$$w = \operatorname{shrink}_{l_p}(z, \beta) = \max \left\{ 0, |z| - \frac{|z + \epsilon|^{p-1}}{\beta} \right\} \operatorname{sign}(z), \quad (6)$$

où ϵ est fixé à 0.001. Pour le cas convexe $p = 1$, on obtient l'opérateur de seuillage doux qui correspond à la solution exacte de l'opérateur proximale associé dans ce cas. On adopte une approche anisotrope qui consiste à appliquer le seuillage sur chaque composante du champ séparément. Les solutions aux sous-problèmes (sp_1) et (sp_2) sont données pixel-par-pixel comme suit :

$$w_1^{(k+1)} = \begin{cases} w_{1,x}^{(k+1)} = \operatorname{shrink}_{l_p}(\nabla_x s - v_x, \beta) \\ w_{1,y}^{(k+1)} = \operatorname{shrink}_{l_p}(\nabla_y s - v_y, \beta) \end{cases} \quad (7)$$

$$w_2^{(k+1)} = \begin{cases} w_{2,x}^{(k+1)} = \operatorname{shrink}_{l_p}(\nabla_x s, \beta) \\ w_{2,y}^{(k+1)} = \operatorname{shrink}_{l_p}(\nabla_y s, \beta). \end{cases} \quad (8)$$

3.2 Problème (sp_3)

Le problème (sp_3) est quadratique et admet ainsi une solution exacte. Les dérivées peuvent être exprimées par des opérateurs linéaires¹. Le problème peut-être résolu efficacement via la transformée de Fourier \mathcal{F} :

$$s^{(k+1)} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F} \left(\operatorname{div} \left(\vec{v} + w_1^{(k+1)} + \lambda w_2^{(k+1)} \right) \right)}{(1 + \lambda) \hat{\operatorname{lap}}} \right\}, \quad (9)$$

où div représente l'opérateur de divergence et $\hat{\operatorname{lap}}$ est la fonction de transfert du filtre Laplacien discret. Une autre façon de résoudre le problème (sp_3) consiste à le formuler en système linéaire :

$$\begin{aligned} (I + \lambda) L s^{(k+1)} &= D_x^T (v_x + w_{1,x}^{(k+1)} + \lambda w_{2,x}^{(k+1)}) \\ &\quad + D_y^T (v_y + w_{1,y}^{(k+1)} + \lambda w_{2,y}^{(k+1)}), \end{aligned} \quad (10)$$

¹ Les dérivées discrètes sont exprimées via les filtres $[1 \ -1]^T$ et $[1 \ -1]$.

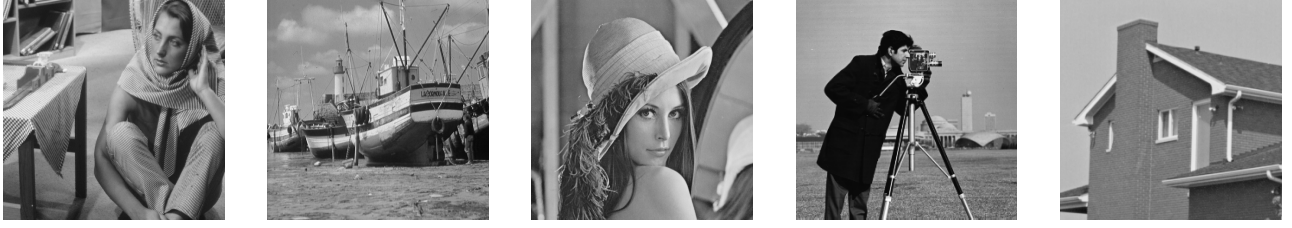


FIGURE 2 – Images naturelles utilisées pour le benchmark 1.

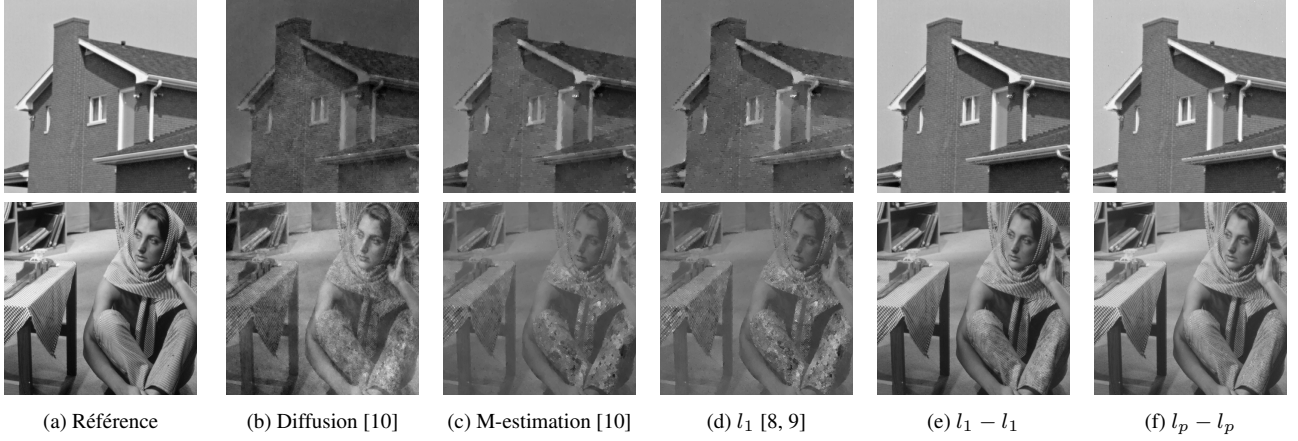


FIGURE 3 – Résultats de reconstruction avec plusieurs méthodes. Comme on peut le constater, la méthode proposée permet de retrouver une image de qualité supérieure à partir d'un champ sévèrement corrompu (30% de données aberrantes).

où D_x et D_y sont des opérateurs de différentiation linéaires et $L = D_x D_x^T + D_y D_y^T$ est la matrice Laplacienne.

3.3 Convergence et complexité

On discute dans cette section les propriétés de convergence du solveur proposé. Par souci de simplification, on considère le problème de minimisation suivant :

$$\text{minimiser } f(x) + g(x). \quad (11)$$

Le solveur consiste à introduire deux nouvelles variables w_1 et w_2 au lieu d'une seule comme suit :

$$\text{minimiser } f(w_1) + \frac{\beta}{2} \|x - w_1\|_2^2 + f(w_2) + \frac{\beta}{2} \|x - w_2\|_2^2. \quad (12)$$

Pour étudier l'équivalence entre les deux problèmes, on doit vérifier la condition d'optimalité suivante :

$$0 \in \partial f(x) + \partial g(x). \quad (13)$$

Pour les variables fixées x , w_1 , w_2 , le solveur satisfait :

$$\begin{aligned} w_1 &= \underset{w_1}{\operatorname{argmin}} f(w_1) + \frac{\beta}{2} \|x - w_1\|_2^2 \\ w_2 &= \underset{w_2}{\operatorname{argmin}} f(w_2) + \frac{\beta}{2} \|x - w_2\|_2^2 \\ x &= \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|x - w_1\|_2^2 + \|x - w_2\|_2^2, \end{aligned} \quad (14)$$

ce qui est équivalent en utilisant la forme proximale :

$$\begin{aligned} w_1 &= (I + \frac{1}{\beta} \partial f)^{-1} x, \quad w_2 = (I + \frac{1}{\beta} \partial g)^{-1} x \\ 2x &= w_1 + w_2. \end{aligned} \quad (15)$$

On considère maintenant une approximation de premier ordre de l'opérateur proximal [14] :

$$\operatorname{prox}_{\frac{1}{\beta} f}(x) \approx x - \frac{1}{\beta} \partial f(x), \quad (16)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} w_1 &\in x - \frac{1}{\beta} \partial f(x), \quad w_2 \in x - \frac{1}{\beta} \partial g(x) \\ 2x &= w_1 + w_2. \end{aligned} \quad (17)$$

En combinant les deux équations, la condition d'optimalité est vérifiée. Dans le cas convexe (l_1), l'approximation au premier ordre de l'opérateur proximal coïncide avec la solution exacte. Dans ce cas, l'optimum global est atteint. Dans le cas non-convexe ($l_{p < 1}$), ceci n'est pas vérifié. Ainsi, un optimum global ne peut être atteint. Cependant, le cas non-convexe donne de meilleurs résultats en pratique. Concernant la complexité, la méthode reconstruit la solution s juste une seule fois par itération via le problème (sp_3). Ainsi, la méthode est presque aussi rapide qu'une approche sans régularisation puisque les solutions aux problèmes (sp_1) et (sp_2) consistent en des opérations de seillage pixel-par-pixel.

	10%	20%	30%	40%	50%	Moyenne
l_2 [6]	9.60 dB	5.29 dB	2.24 dB	0.54 dB	-1.9 dB	3.15 dB
Diffusion [10]	14.02 dB	10.03 dB	6.50 dB	3.98 dB	2.1 dB	7.33 dB
M-estimation [10]	36.46 dB	22.54 dB	10.46 dB	4, 30 dB	0.32 dB	14.82 dB
l_1 [8, 9]	25.52 dB	17.01 dB	8.97 dB	4.15 dB	0.49 dB	11.29 dB
l_1-l_1	46.83 dB	41.70 dB	35.27 dB	28.54 dB	21.85 dB	34.84 dB
l_p-l_p	53.33 dB	45.41 dB	36.36 dB	28.70 dB	23.14 dB	37.39 dB

TABLE 1 – PSNR moyen sur 5 images naturelles dont le gradient est corrompu avec plusieurs niveaux de données aberrantes. La méthode proposée permet d’améliorer de façon importante la qualité de la reconstruction.

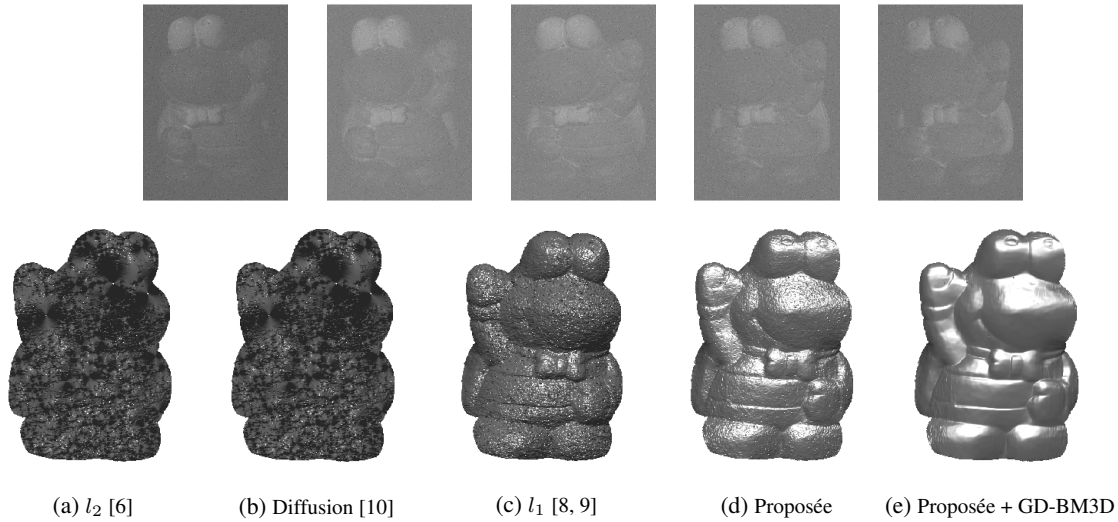


FIGURE 4 – Reconstruction de surface via stéréo-photométrie sur des images corrompues (10% de données aberrantes + bruit blanc gaussien). La méthode proposée permet de retrouver une surface de qualité supérieure.

4 Expériences

On réalise plusieurs expériences pour valider l’efficacité de la méthode proposée comparée aux méthodes d’optimisation antérieures. Les expériences consistent principalement à corrompre un champ de gradient de référence et essayer par la suite de reconstruire l’image ou surface par plusieurs méthodes. La première expérience considère des images naturelles dont le gradient est corrompu avec plusieurs niveaux de données aberrantes aléatoires (gaussiennes de 10% à 50%). Les résultats sont présentés dans la Table 1 et la Figure 3. Comme on peut le constater, la méthode proposée ($l_1 - l_1$ et $l_{p_1} - l_{p_2}$) permet d’améliorer de façon considérable la qualité de la reconstruction. On prend $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.5$ pour la plupart des expériences. L’utilisation d’une norme non-convexe $l_{p < 1}$ permet d’améliorer encore plus le résultat. La deuxième expérience consiste à reconstruire des surfaces synthétiques à partir de gradients corrompus par des données aberrantes. Comme on peut le voir dans la Figure 5, la méthode proposée permet de construire une meilleure surface. Le résultat avec la version non-convexe est très similaire à la surface de référence. Le PSNR pour différents niveaux de corruptions est présenté dans la Table 2. La 3ème expérience consiste à évaluer la technique proposée pour le problème de stéréo-photométrie. A partir d’images d’une scène ombrée sévère-

ment corrompues avec des données aberrantes et un bruit dense. Comme on peut le constater dans la Figure 4, la méthode proposée permet de corriger plus de données aberrantes dans le champ estimé. En combinant la méthode proposée avec la méthode de dé-bruitage BM3D [17] dans le domaine du gradient (noté GD-BM3D), on obtient une surface de qualité supérieure.

Conclusion

Ce travail présente une nouvelle approche pour la reconstruction de surface/image à partir de gradient corrompu. La méthode proposée consiste à utiliser la parcimonie de deux manières pour rendre la reconstruction robuste aux données aberrantes. On propose un solveur efficace pour estimer rapidement une bonne solution du problème d’optimisation. Les expériences montrent que la méthode proposée permet d’avoir une surface/image de qualité bien supérieure comparée aux méthodes d’optimisation antérieures.

Remerciements

Ce travail a été soutenu par la bourse INRIA CORDIS.

Références

- [1] R. Woodham, *Photometric method for determining surface orientation from multiple images*, in *OptEng*,

		2%	5%	7%	10%	15%	20%	Moyenne
Ramp Peaks	l_2	33.18 dB	28.91 dB	25.75 dB	24.80 dB	23.80 dB	23.04 dB	26.58 dB
	Diffusion	35.76 dB	26.79 dB	27.63 dB	24.92 dB	22.93 dB	22.31 dB	26.72 dB
	M-estimation	36.25 dB	31.89 dB	28.83 dB	27.86 dB	25.10 dB	21.62 dB	33.24 dB
	l_1	46.21dB	40.57 dB	38.54 dB	37.70 dB	29.34 dB	25.29 dB	36.28 dB
	Proposed	144.62 dB	140.21 dB	120.01 dB	80.02 dB	41.07 dB	32.04 dB	92.99 dB
Mozart	l_2	17.84 dB	14.38 dB	12.76 dB	9.20 dB	5.95 dB	3.97 dB	10.68 dB
	Diffusion	30.44 dB	23.07 dB	20.31 dB	16.07 dB	13.76 dB	11.94 dB	19.27 dB
	M-estimation	40.73 dB	32.58 dB	29.23 dB	25.42 dB	21.71 dB	18.78 dB	28.08 dB
	l_1	63.75 dB	52.23 dB	45.70 dB	38.57 dB	27.85 dB	21.78 dB	41.64 dB
	Proposed	89.83 dB	82.54 dB	73.68 dB	67.36 dB	53.97 dB	50.95 dB	69.72 dB
Cat	l_2	23.26 dB	16.21 dB	13.62 dB	10.42 dB	6.88 dB	4.61 dB	12.50 dB
	Diffusion	23.66 dB	19.11 dB	13.57 dB	10.21 dB	6.48 dB	4.12 dB	12.86 dB
	M-estimation	35.64 dB	27.46 dB	24.54 dB	21.07 dB	16.67 dB	11.91 dB	23.39 dB
	l_1	63.20 dB	46.86 dB	45.75 dB	36.88 dB	21.61 dB	14.25 dB	38.10 dB
	Proposed	99.32 dB	91.12 dB	88.62 dB	79.53 dB	72.08 dB	50.02 dB	80.12 dB

TABLE 2 – Reconstruction de 3 surfaces avec 6 niveaux de corruption avec des données aberrantes. Comme on peut le voir, la méthode proposée permet de supporter des corruptions plus sévères comparée aux méthodes précédentes.

- 19(1) :139–144, 1980.
- [2] B. K. P. Horn., *Height and gradient from shading*, in Int. J. Comput. Vision, 5(1) :37–75, Sept. 1990.
- [3] P. Pérez, M. Gangnet, and A. Blake, *Poisson image editing*, in ACM SIGGRAPH 2003 Papers, SIGGRAPH '03, pages 313–318, New York, NY, USA, 2003. ACM.
- [4] A. Levin, A. Zomet, S. Peleg, and Y. Weiss, *Seamless image stitching in the gradient domain*, in Proceedings of the European Conference on Computer Vision, 2006.
- [5] R. Fattal, D. Lischinski, and M. Werman, *Gradient domain high dynamic range compression*, ACM Trans. Graph., 21(3) :249–256, July 2002.
- [6] T. Simchony, R. Chellappa, and M. Shao, *Direct analytical methods for solving poisson equations in computer vision*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 12(5) :435–446, May 1990.
- [7] R. T. Frankot and R. Chellappa, *A method for enforcing integrability in shape from shading algorithms*, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 10, no. 4, pp. 439–451, Jul. 1988.
- [8] D. Reddy, A. K. Agrawal, and R. Chellappa, *Enforcing integrability by error correction using l_1 -minimization*, in CVPR, pages 2350–2357, 2009.
- [9] Z. Du, A. Robles-Kelly, and F. Lu, *Robust surface reconstruction from gradient field using the l_1 norm*, in DICTA, pages 203–209, 2007.
- [10] A. Agrawal, R. Raskar, and R. Chellappa, *What is the range of surface reconstructions from a gradient field?*, in ECCV, pages 578–591, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer-Verlag.
- [11] A. Agrawal, R. Chellappa, and R. Raskar, *An algebraic approach to surface reconstruction from gradient fields*, in ICCV, Volume1, pp. 174–181, 2005.
- [12] M. Harker and P. O’Leary, *Least squares surface reconstruction from gradients : Direct algebraic methods with spectral, tikhonov, and constrained regularization*, in CVPR, pages 2529–2536, 2011.
- [13] D. Geman and G. Reynolds, *Constrained restoration and the recovery of discontinuities*, in IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 14, no. 3, pp. 367–383, Mar. 1992.
- [14] N. Parikh and S. Boyd, *Proximal algorithms*, in Foundations and Trends in Optimization, 2013.
- [15] D. Krishnan and R. Fergus, *Fast image deconvolution using hyperlaplacian priors*, in Advances in Neural Information Processing Systems, pp. 1033–1041, 2009.
- [16] P. Kovesei, *Shapelets correlated with surface normals produce surfaces*, in ICCV, pages 994–1001, 2005.
- [17] K. Dabov, A. Foi, V. Katkovnik, K. Egiazarian, *Image denoising by sparse 3D transform-domain collaborative filtering*, in IEEE Trans. Image Processing, vol. 49, no. 8, August 2007.
- [18] H. Badri, H. Yahia, D. Aboutajdine, *Robust surface reconstruction via triple sparsity*, in CVPR, pages 2291–2298, 2014.
- [19] M. Das Gupta and S. Kumar, *Non-convex p -norm projection for robust sparsity*, in ICCV, pages 1593–1600, 2013.

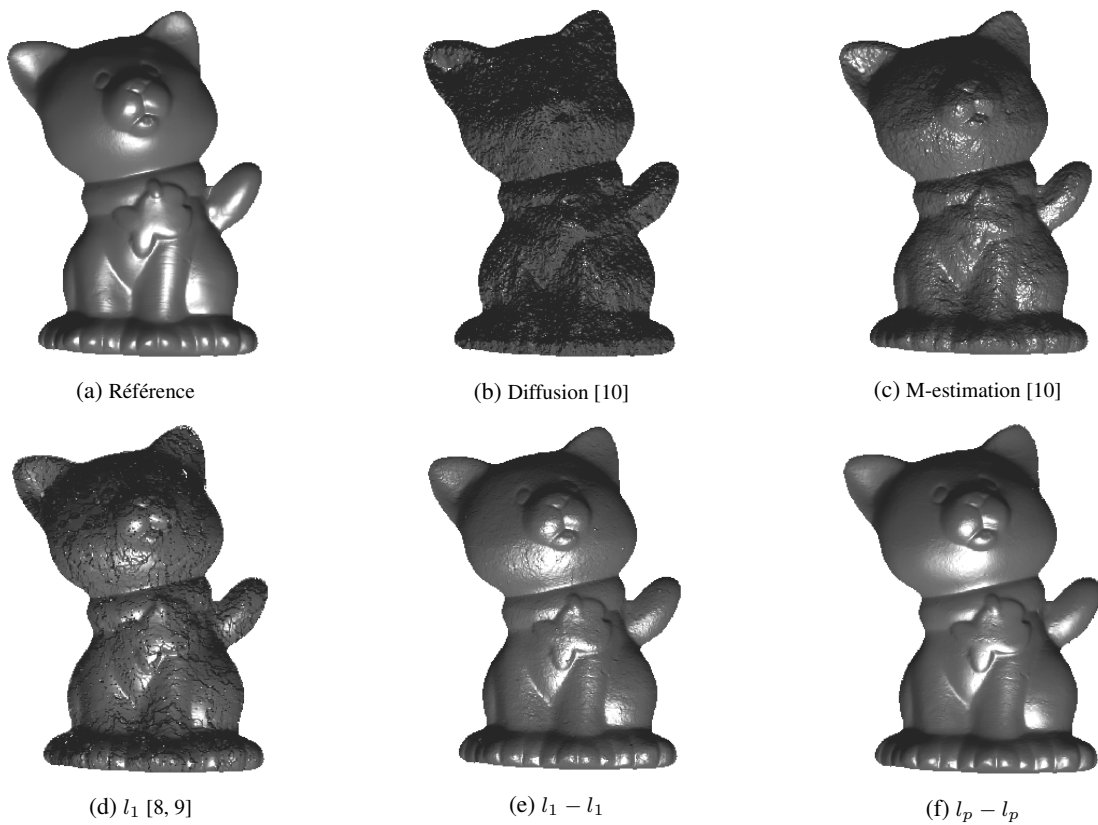
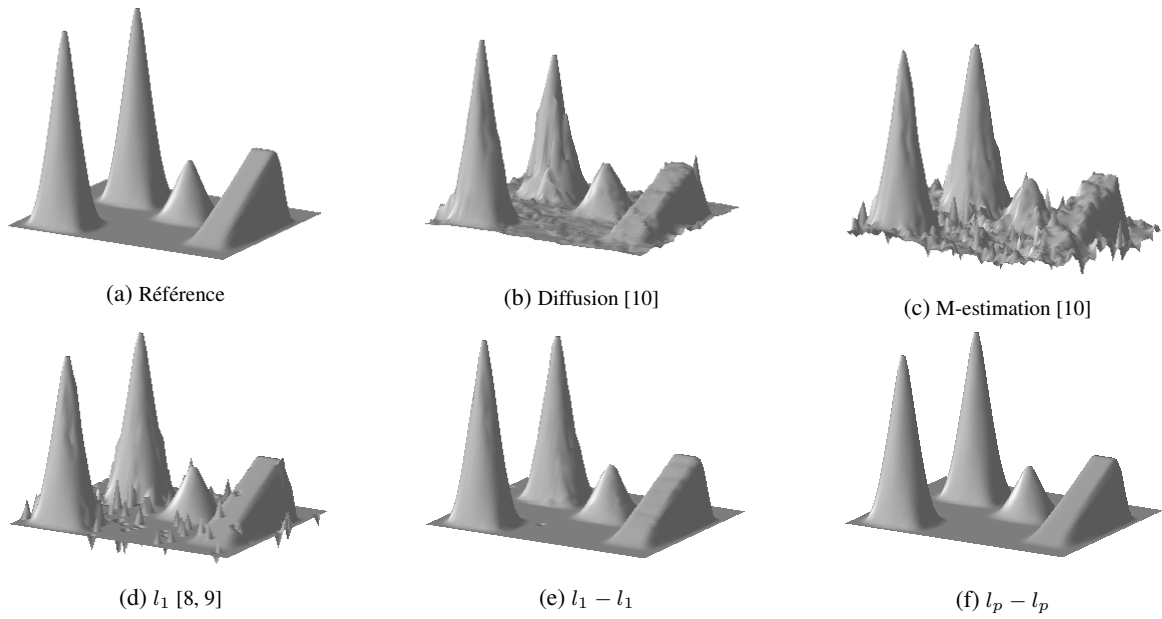


Figure 5 - Reconstruction de surface à partir d'un champ corrompu (10% de données aberrantes pour Ramp Peaks, 20% pour Cat). La méthode proposée (e)-(f) permet de mieux reconstruire la surface même cas de corruption sévère.