

Shape-from-Template dans Flatland

Mathias GALLARDO

Daniel PIZARRO

Adrien BARTOLI

Toby COLLINS

ALCoV-ISIT, UMR6284 CNRS / Université d'Auvergne, Clermont-Ferrand

Mathias.Gallardo@gmail.com

Résumé

Le Shape-from-template (SfT) consiste en la reconstruction d'un objet déformable observé sur une image grâce à sa forme de référence. Le 2DSfT est le cas usuel du SfT où la forme de référence est une surface plongée dans un espace 3D et l'image une projection 2D. Nous présentons le 1DSfT, un nouveau cas du SfT où la forme de référence est une courbe plongée dans un espace 2D et l'image une projection 1D. Nous nous concentrons sur les déformations isométriques, pour lesquelles le 2DSfT est un problème bien posé. À travers une étude théorique du 1DSfT avec projection perspective, nous montrons que ce cas est lié au 2DSfT, mais qu'il possède des propriétés différentes : (i) le 1DSfT ne possède pas de solution à la fois exacte et locale et (ii) le 1DSfT ne possède pas de solution unique, mais un nombre fini d'au moins deux solutions. Ensuite, nous proposons deux méthodes d'initialisation convexes : une solution locale et analytique basée sur la linéarité infinitésimale et une solution globale basée sur l'inextensibilité. Nous montrons comment le raffinement non-convexe peut être implémenté et comment l'isométrie peut être contrainte avec une nouvelle paramétrisation basée sur l'angle. Enfin, notre méthode est testée sur des données simulées et réelles.

Mots Clef

Reconstruction 2D, Shape-from-Template, isométrie, paramétrisation angulaire

Abstract

Shape-from-Template (SfT) is the problem of inferring the shape of a deformable object as observed in an image using a shape template. We call 2DSfT the 'usual' instance of SfT where the shape is a surface embedded in 3D and the image a 2D projection. We introduce 1DSfT, a novel instance of SfT where the shape is a curve embedded in 2D and the image a 1D projection. We focus on isometric deformations, for which 2DSfT is a well-posed problem. Through a complete theoretical study of 1DSfT with perspective projection, we show that it is related to 2DSfT, but may have very different properties: (i) 1DSfT cannot be exactly solved locally and (ii) 1DSfT cannot be solved uniquely, as it has a discrete amount of at least two solutions. We then propose two convex initialization algorithms, a local analytical one based on infinitesimal planarity and a global one based on inextensibility. We show how nonconvex refinement can

be implemented where, contrarily to current 2DSfT methods, one may enforce isometry exactly using a novel angle-based parameterization. Finally, our method is tested with simulated and real data.

Keywords

2D-reconstruction, Shape-from-Template, isometry, angle-based parametrization

1 Introduction

La nouvelle Flatland [4] décrit un monde 2D où les habitants sont représentés par des polygones. Dans Flatland, le statut social d'une personne est déterminé par la régularité et le nombre de côtés du polygone. À la création de Flatland, il y avait une technique très aboutie nommée "l'Art de la Connaissance Visuelle". Elle était utilisée par les classes les plus élevées pour reconnaître la classe sociale des autres. Les couleurs étaient interdites puisque les classes inférieures pouvaient les utiliser pour se faire passer pour des polygones de la classe la plus élevée. Imaginons maintenant que la situation dans Flatland ait évolué. Les différences sociales se sont estompées, puisque "l'Art de la Connaissance Visuelle" a été popularisé par l'utilisation des couleurs et de la perception de la perspective. Toutefois, une question reste en suspens : est-ce qu'un habitant de Flatland peut reconstruire une courbe à partir de correspondances entre une projection 1D et sa structure de référence ? Nous appelons ce problème le 1D Shape-from-Template (SfT), puisqu'il ressemble au problème connu du SfT. Le 2DSfT considère une image 2D d'une surface 2D dans un espace 3D et cherche à reconstruire la forme de la surface. Les contraintes du problème sont fournies par l'image de la surface et une hypothèse sur la déformation subie par la surface. Le modèle de déformation le plus étudié est l'isométrie [6, 14, 8], mais d'autres modèles comme la conformité [6] et l'élasticité linéaire [12] ont aussi été étudiés. Les déformations isométriques sont efficaces pour des objets fins comme les vêtements et le papier. Un point important est que le 2DSfT isométrique est un problème bien posé [6].

Nous présentons le 1DSfT en supposant des déformations isométriques. Pour le 1DSfT, cette hypothèse se traduit par la conservation de la distance entre deux points après déformation. Nous supposons connue la correspondance entre la référence 1D et l'image 1D et cette correspon-

dance est modélisée par une fonction lisse de déformation image. Il s'agit de l'analogie 1D de [5]. Dans les cas 1D et 2D, l'isométrie est une contrainte non-convexe. Le 1DSfT présente la même formulation que le 2DSfT avec des courbes dans l'espace, puisque les deux impliquent un saclaire comme inconnue, la profondeur, et une contrainte différentielle du premier ordre fournie par l'isométrie. Les méthodes du 2DSfT se répartissent en trois catégories : (i) les solutions locales et analytiques, (ii) la relaxation convexe et (iii) le raffinement non-convexe.

Une solution obtenue par une méthode de (i) ou (ii) est souvent utilisée pour initialiser une méthode de (iii). Dans (i), la profondeur et la normale de la surface sont estimées, indépendamment pour chaque point, à partir de la fonction de déformation image et de ses dérivées. Dans (ii), l'isométrie est relâchée et devient une contrainte d'inextensibilité : la surface possède localement une borne supérieure d'extension, ce qui est une contrainte convexe. Dans (iii), une solution fournie est raffinée de manière itérative en minimisant une combinaison de l'erreur de re-projection et de l'erreur d'isométrie. À première vue, le 1DSfT s'avère solvable directement à partir des résultats du 2DSfT. Le 1DSfT semble même être plus facile, puisqu'au problème initial une dimension a été enlevée. Bien que cela soit vrai sur certains aspects, cela ne l'est pas sur d'autres. Une étude approfondie montrent que les méthodes de (i) ne fonctionnent pas pour le 1DSfT, que celles de (ii) s'adaptent et que celles de (iii) peuvent être implémentées d'une meilleure façon que dans le 2DSfT. Le point le plus important est que le problème du 1DSfT est mal posé, admettant M solutions, avec $1 < M < \infty$.

Tout d'abord, nous présentons un modèle différentiel du 1DSfT. Alors que le 2DSfT est localement solvable au premier ordre, le 1DSfT ne peut pas être résolu localement, *quelque soit l'ordre*. En d'autres termes, dériver les équations du 1DSfT ne permet pas de surpasser le nombre croissant d'inconnues locales. Notre étude révèle également la présence de points critiques. En ces points, la normale de la courbe est colinéaire à la ligne de vue et la profondeur peut être déterminée localement. Un point important est que le nombre de solutions est borné par 2^{N+1} , avec N le nombre de points critiques. Nous proposons ensuite deux algorithmes d'initialisation. Premièrement, bien que le 1DSfT ne puisse être résolu localement de manière exacte, nous montrons comment une approximation localement affine de la courbe permet la résolution locale. Cela mène à un algorithme d'approximation locale, explorant de nouvelles pistes dans (i). Deuxièmement, nous montrons comment l'inextensibilité basée sur le Maximum Depth Heuristic (ii) peut être directement utilisée. Nous indiquons comment trouver les points critiques à partir de la déformation image et comment en déduire les M solutions possibles à travers un raffinement non-convexe, faisant parti de (iii). Nous montrons que l'isométrie peut être exactement respectée en utilisant la paramétrisation angulaire. Cette simple paramétrisation peut fournir d'autres pistes pour le 2DSfT, pour le-

quel l'isométrie est contrainte de manière approximative en utilisant un poids dans la fonction de coût [7]. C'est ainsi que nous évitons le compromis dans le choix des poids sur les données et sur le modèle, à la différence du 2DSfT. Nous testons cette paramétrisation sur un cas plus simple, le 1DSfT, pour pouvoir l'étendre par la suite au 2DSfT. Enfin, nous présentons des résultats sur des données simulées et réelles.

Notation. Nous utilisons les lettres grecques pour les fonctions (e.g. φ), les caractères gras pour les vecteurs (e.g. \mathbf{Q}) et les accents circonflexes pour les grandeurs estimées (e.g. $\hat{\mathbf{Q}}$). La première et la seconde dérivées d'une fonction sont notées avec une apostrophe (e.g. φ'_y et φ''_y). La norme-2 est notée $\|\cdot\|_2$. Les coordonnées homogènes sont écrites avec une barre, comme par exemple $\bar{\eta} = (\eta^\top \ 1)^\top$.

2 État de l'art

Le problème du SfT a été étudié pour une grande variété de modèles de déformation, qu'on peut classer en modèles *statistiques* ou *physiques*. Les méthodes statistiques [10, 14, 9] modélisent l'espace des déformations à partir des données et sont très efficaces pour des espaces de faible dimension, comme les mouvements du visage. Au contraire, les méthodes physiques [6, 14, 12] fonctionnent pour des espaces de déformations de dimension infinie, en utilisant des modèles mathématiques qui reposent sur les lois physiques. Le modèle isométrique appartient à cette catégorie. Toutefois, d'autres modèles de déformation ont été étudiés, comme le modèle conforme [6] ou élastique linéaire [12]. Le modèle isométrique a suscité un vif intérêt dans [6, 14, 13]. C'est un modèle adapté à de nombreux objets réels, qui fait du 2DSfT un problème bien posé [6]. Malgré leur simplicité, les contraintes isométriques sont non-convexes, pénalisant fortement le temps de calcul des solutions. Les méthodes (i) résolvent localement un système non linéaire d'EDP [6, 8]. Ces méthodes sont très rapides, mais n'assurent pas l'isométrie des surfaces obtenues en présence de bruit. Les méthodes (ii) relâchent la contrainte d'isométrie en utilisant le Maximum Depth Heuristic (MDH) [13]. Ces méthodes apportent de très bons résultats, mais s'avèrent inefficaces lorsque la perspective de l'objet est trop faible. Enfin, les méthodes (iii) optimisent une fonction de coût statistique, mais l'optimisation est non-convexe. Elles nécessitent une initialisation adaptée, habituellement fournie par les méthodes (i) et (ii).

Pour résumer, les méthodes existantes pour le cas isométrique du 2DSfT résolvent un problème bien posé, avec 3 contraintes et 3 inconnues [6]. Dans le cas 1DSfT, cela semble être plus difficile dans la mesure où le nombre de contraintes locales d'isométrie passe de 3 à 1, alors que le nombre d'inconnues passe uniquement de 3 à 2.

3 Modélisation

Notre modélisation est présentée dans la figure 1. Elle s'appuie sur l'étude du 2DSfT dans [6]. Dans le cas du 1DSfT, la référence connue est un objet 1D notée $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$.

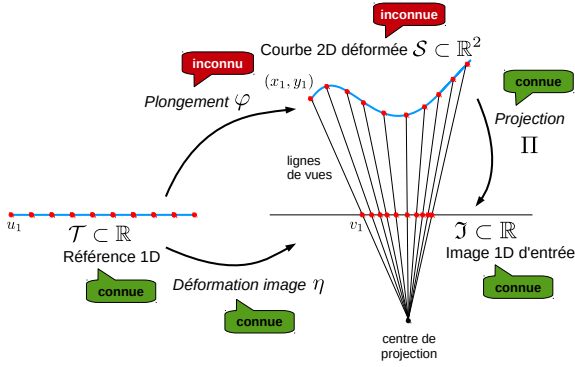


FIGURE 1 – Configuration générale du 1DSfT.

Cette référence \mathcal{T} est déformée en une courbe lisse $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ par un plongement 2D inconnu. Nous notons ce plongement $\varphi = (\varphi_x \ \varphi_y)^\top \in C^\infty(\mathcal{T}, \mathbb{R}^2)$. L'image 1D d'entrée $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ est obtenue par une projection perspective de \mathcal{S} . Cette projection est notée Π :

$$\Pi(\mathbf{Q}) = \frac{x}{y} \quad \text{où} \quad \mathbf{Q} = (x \ y)^\top, \quad (1)$$

Nous supposons que les coordonnées de l'image d'entrée sont normalisées à l'aide des paramètres intrinsèques de la caméra (la focale et le décalage principal). Nous définissons $\eta \in C^\infty(\mathcal{T}, \mathbb{R})$ comme la déformation image entre la référence \mathcal{T} et l'image d'entrée \mathcal{J} . Nous supposons que \mathcal{S} ne présente aucune auto-occultation dans \mathcal{J} . L'objectif du 1DSfT est de reconstruire le plongement φ , à partir de la déformation image η , de la projection Π et de l'hypothèse de déformation isométrique. La contrainte de *reprojection* relie la déformation image et le plongement grâce à la fonction de projection :

$$\eta = \Pi \circ \varphi \quad (2)$$

La contrainte d'*isométrie* force la conservation des distances géodésiques entre \mathcal{T} et \mathcal{S} . L'isométrie est une propriété différentielle du premier ordre de φ :

$$\|\varphi'\|_2^2 = 1. \quad (3)$$

À partir des contraintes (3) et (2), nous définissons le problème du 1DSfT de la manière suivante :

$$\text{Trouver } \varphi \in C^\infty(\mathcal{T}, \mathbb{R}^2) \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} \eta = \Pi \circ \varphi & (\text{rep.}) \\ \|\varphi'\|_2^2 = 1 & (\text{iso.}) \end{cases} \quad (4)$$

4 Étude différentielle

4.1 Formulation de l'EDO

Nous allons montrer que le problème du 1DSfT (4) revient à trouver la solution d'une équation non-linéaire différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre. Tout d'abord, nous

réécrivons la contrainte de reprojection (2) :

$$\varphi_y \eta = \varphi_x, \quad (5)$$

qui, dérivée une fois, donne :

$$\eta' \varphi_y + \eta \varphi_y' = \varphi_x'. \quad (6)$$

En substituant φ_x' de l'équation (6) dans la contrainte d'isométrie (3) et en développant l'expression, nous aboutissons à :

$$(\varphi_y' \eta)^2 + 2\varphi_y \varphi_y' \eta \eta' + (\varphi_y \eta')^2 + (\varphi_y')^2 = 1. \quad (7)$$

L'équation (7) est une EDO non-linéaire du premier ordre avec φ_y comme variable. Soit φ_y une solution de l'équation (7), φ peut s'écrire avec l'inconnue du problème, $\varphi = \varphi_y \bar{\eta}$.

Nous utilisons l'équation (7) pour étudier le problème du 1DSfT, sa stabilité à l'échelle locale et l'espace de ses solutions. Cela conduit à deux résultats importants : *i*) le 1DSfT ne possède pas localement de solution exacte, et *ii*) le 1DSfT possède un nombre fini de solutions.

4.2 Solutions localement exactes

Nous déterminons quelles solutions locales de l'équation (7) existent avec l'hypothèse que φ_y et φ_y' soient des variables indépendantes, ce qui crée de nouvelles équations. Ces solutions sont appelées solutions non-holonomes [11] et nous les utilisons car, dans [6], elles permettent de prouver que le problème est bien posé et fournissent des solutions analytiques à celui-ci.

Nous prouvons la proposition suivante en considérant l'existence de solutions non-holonomes de l'équation (7) :

Proposition 1. *La solution non-holonyme φ_y dans l'équation (7) est sous-contrainte à tout ordre de dérivation.*

Démonstration. L'équation (7) fournit une seule contrainte pour deux inconnues, φ_y and φ_y' . En dérivant (7), nous obtenons des équations supplémentaires. Après avoir dérivé $k - 1$ fois, nous avons k équations. Toutefois, chaque dérivation introduit une nouvelle inconnue. À l'ordre k , nous avons un total de $k + 1$ inconnues (*i.e.* $\varphi_y, \varphi_y', \dots, \varphi_y^{(k)}$). Ainsi, nous avons k équations et $k + 1$ inconnues. Le problème est donc sous-contraint pour tout ordre $k > 0$. \square

4.3 Espace des solutions

Nous étudions les solutions *globales* au problème du 1DSfT. Tout d'abord, nous réécrivons l'ODE (7) à l'aide d'un changement de variable qui nous permet de définir la notion de *points critiques*. Ceux sont les points où la normale du plongement est colinéaire à la ligne de vue. Les points critiques sont partagés par un groupe de solutions à l'équation (4). Nous montrons que le nombre de points critiques nous fournit une borne supérieure du nombre de solutions.

Changement de variable. Nous définissons d'abord $\varepsilon = \|\bar{\eta}\|_2$. Ensuite, $\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon}\eta\eta'$. En introduisant ε et ε' dans l'équation (7), nous obtenons :

$$(\varphi'_y\varepsilon + \varphi_y\varepsilon')^2 - \varphi_y^2\varepsilon'^2 + \varphi_y^2\eta'^2 = 1. \quad (8)$$

Nous définissons alors le changement de variable :

$$\theta = \varphi_y\varepsilon, \quad (9)$$

ce qui nous permet de transformer (8) en une équation dépendant de θ et θ' :

$$\theta'^2 + \xi\theta^2 = 1 \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{\eta'^2}{\varepsilon^4}. \quad (10)$$

Enfin, nous obtenons θ' grâce à l'équation (10) :

$$\theta' = \pm\sqrt{1 - \xi\theta^2}. \quad (11)$$

Étant donné une solution de l'équation (11), nous reconstruisons la solution à la première EDO (7) à l'aide du changement de variable (9).

Points critiques. Nous définissons maintenant les points critiques et leurs propriétés, nous permettant ainsi d'étudier l'espace des solutions au 1DSfT.

Définition 1. Soit θ_φ une solution de l'équation (11), $u_c \in \mathcal{T}$ est un point critique de θ_φ si $\theta'_\varphi(u_c) = 0$ donc si $\theta_\varphi^2(u_c)\xi(u_c) = 1$.

Définissons le champ des normales du plongement φ avec l'opérateur $\mu[\varphi]$:

$$\mu[\varphi] = \begin{pmatrix} -\varphi'_y & \varphi'_x \end{pmatrix}^\top. \quad (12)$$

Notons qu'avec $u \in \mathcal{T}$, $\mu[\varphi](u)$ est un vecteur unitaire quand φ est isométrique.

Proposition 2. Soit φ une solution de (4), $u_c \in \mathcal{T}$ est un point critique si et seulement si $\mu[\varphi](u_c)^\top \frac{\varphi(u_c)}{\|\varphi(u_c)\|_2} = \pm 1$.

Démonstration. Nous commençons par écrire η' en fonction de φ à partir de l'équation (2) :

$$\eta' = \frac{\varphi'_x\varphi_y - \varphi_x\varphi'_y}{(\varphi_y)^2}. \quad (13)$$

Nous injectons (13) dans (10) et (9) pour exprimer ξ et θ :

$$\xi = \frac{(\varphi'_x\varphi_y - \varphi_x\varphi'_y)^2}{(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)^2} \quad (14)$$

$$\theta = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}. \quad (15)$$

La définition 1 donne que si u_c est un point critique, alors :

$$\theta^2(u_c)\xi(u_c) = 1, \quad (16)$$

et, en utilisant (14), (15) et (12), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \theta^2(u_c)\xi(u_c) &= \frac{(\varphi'_x(u_c)\varphi_y(u_c) - \varphi_x(u_c)\varphi'_y(u_c))^2}{\varphi_x^2(u_c) + \varphi_y^2(u_c)} \\ &= \left(\mu[\varphi](u_c)^\top \frac{\varphi(u_c)}{\|\varphi(u_c)\|_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

□

La proposition 2 fournit une interprétation géométrique des points critiques : ils représentent les points de la courbe \mathcal{S} où la normale et le rayon optique sont colinéaires.

Proposition 3. Soient φ et γ deux solutions de l'équation (4) où $u_c \in \mathcal{T}$ est un point critique de φ et de γ , alors nous avons $\varphi(u_c) = \pm\gamma(u_c)$.

Démonstration. Si les fonctions φ et γ sont deux solutions de (4), alors elles respectent la contrainte de reprojction $\Pi \circ \varphi = \Pi \circ \gamma$. Cette propriété est équivalente à :

$$\exists \rho \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad t.q. \quad \varphi = \rho\gamma. \quad (18)$$

Soient $\theta_\varphi = \varepsilon\varphi_y$ et $\theta_\gamma = \varepsilon\gamma_y$ deux solutions de (11). L'équation (18) donne que $\theta_\varphi = \rho\theta_\gamma$. Si u_c est un point critique, nous avons, à partir de la définition 1, que $\theta'_\varphi = 0$ et $\theta'_\gamma = 0$, amenant à :

$$\theta_\varphi^2\xi = \rho^2\theta_\gamma^2\xi = 1 \quad \text{et} \quad \theta_\gamma^2\xi = 1. \quad (19)$$

À partir de l'équation (19), nous avons que $\rho^2 = 1$ et donc $\varphi = \pm\gamma$. □

Proposition 4. Soient deux solutions φ et γ de (4), si $u_c \in \mathcal{T}$ est un point critique de φ et non de γ , alors $\|\gamma(u_c)\|^2 \leq \|\varphi(u_c)\|^2$.

Démonstration. En dérivant (18), nous obtenons :

$$\varphi'_x = \rho'\gamma_x + \rho\gamma'_x \quad \varphi'_y = \rho'\gamma_y + \rho\gamma'_y. \quad (20)$$

Appliquons la proposition 2. Si u_c est un point critique de φ , alors :

$$\frac{(\varphi'_x(u_c)\varphi_y(u_c) - \varphi_x(u_c)\varphi'_y(u_c))^2}{\varphi_x^2(u_c) + \varphi_y^2(u_c)} = 1. \quad (21)$$

En utilisant les équations (18) et (20), nous remplaçons φ dans l'équation (21) pour obtenir une équation en fonction de $\rho(u_c)$ et de $\gamma(u_c)$:

$$\rho^2(u_c) \left(\frac{\gamma'_x(u_c)\gamma_y(u_c) - \gamma_x(u_c)\gamma'_y(u_c)}{\gamma_x^2(u_c) + \gamma_y^2(u_c)} \right)^2 = 1, \quad (22)$$

qui, grâce à l'équation (17), peut s'exprimer :

$$\rho^2(u_c) \left(\mu[\gamma](u_c)^\top \frac{\gamma(u_c)}{\|\gamma(u_c)\|_2} \right)^2 = 1. \quad (23)$$

L'équation (23) donne que $\rho^2(u_c) \geq 1$, puisque le facteur devant $\rho^2(u_c)$ est le produit scalaire de deux vecteurs unitaires, qui est toujours ≤ 1 . Enfin, grâce à l'équation (18), nous avons $\|\gamma(u_c)\|^2 \leq \|\varphi(u_c)\|^2$. □

Dans la proposition 3, nous montrons que toutes les solutions possédant les mêmes points critiques sont contraintes de se couper dans le plan. Cependant, dans la proposition 4, nous montrons que tous les points critiques ne sont pas nécessairement partagés par toutes les solutions. Les points critiques d'une solution ne se propagent pas sur une solution plus proche de la rétine. Maintenant, nous allons montrer comment caractériser tous les points critiques de l'équation (4) pour toutes les solutions.

Proposition 5. $u_c \in \mathcal{T}$ est un point critique de (4) si c'est une solution de l'équation :

$$2\eta(u_c)\eta'^2(u_c) - (1 + \eta^2(u_c))\eta''(u_c) = 0$$

Démonstration. Nous dérivons l'équation (10) pour obtenir l'EDO suivante :

$$2\theta'\theta'' + \xi'\theta^2 + 2\xi\theta\theta' = 0. \quad (24)$$

Supposons que φ est une solution de l'équation (4) avec $u_c \in \mathcal{T}$ un point critique. $\theta_\varphi = \varepsilon\varphi_y$ est une solution de l'équation (24) et, d'après la définition 1, $\theta'_\varphi(u_c) = 0$. Nous remplaçons θ_φ dans l'équation (24) et évaluons le résultat en u_c , ce qui nous mène à la condition suivante :

$$\xi'(u_c)\theta_\varphi^2(u_c) = 0. \quad (25)$$

Si $\theta_\varphi(u_c)^2 = 0$, alors φ passerait par l'origine de l'appareil photo en u_c . Donc, $\theta_\varphi(u_c)^2 \neq 0$, ce qui mène à $\xi'(u_c) = 0$, où :

$$\xi' = \frac{2\varepsilon^4\eta'\eta'' - 4\varepsilon^3\varepsilon'\eta'^2}{\varepsilon^8}, \quad (26)$$

$\xi'(u_c) = 0$ est équivalent à :

$$\frac{\varepsilon^3}{\eta'}(\varepsilon(u_c)\eta''(u_c) - 2\varepsilon'(u_c)\eta'(u_c)) = 0. \quad (27)$$

En exprimant ε et ε' en fonction de η et en factorisant l'équation (27), nous aboutissons à la condition suivante :

$$(1 + \eta^2(u_c))\eta''(u_c) - 2\eta(u_c)\eta'^2(u_c) = 0, \quad (28)$$

qui dépend uniquement de η et de ses dérivées. \square

La proposition 5 est importante dans la mesure où elle fournit une équation déterminant tous les points critiques et ce à partir de la déformation image η connue et sans besoin de calculer toutes les solutions de (4). Comme nous l'avons expliqué auparavant, le nombre de points critiques fournit une borne supérieure du nombre de solutions de l'équation (4).

Borne supérieure du nombre de solutions. Dans cette partie, nous utilisons les propriétés des points critiques et le théorème de Picard-Lindelöf (PL) afin de déterminer la borne supérieure du nombre de solutions au problème du 1DSfT (4). Le théorème de PL énonce les conditions d'existence et d'unicité des solutions des EDO du premier ordre avec des conditions initiales. Nous reformulons cette

définition de la manière suivante. Soit le problème de Cauchy d'une EDO avec θ une variable dépendant de u et u une variable indépendante :

$$\begin{cases} \theta' = \psi(\theta, u) \\ \theta(u_0) = \theta_0. \end{cases} \quad (29)$$

Si ψ est une fonction lipschitzienne en θ et continue en u pour tout $u \in [u_0 - \epsilon; u_0 + \epsilon]$ avec $\epsilon > 0$, alors il existe une unique solution de (29) dans l'intervalle $[u_0 - \epsilon; u_0 + \epsilon]$.

Pour appliquer le théorème de PL à l'équation (11), nous considérons un intervalle ouvert entre deux points critiques successifs u_{c_1} et u_{c_2} : le signe de θ' ne change pas dans cet intervalle.

Proposition 6. Soient deux points critiques successifs u_{c_1} et u_{c_2} , et soit une solution θ_φ de l'équation (11), le signe de θ'_φ reste constant dans l'intervalle $I = [u_{c_1}; u_{c_2}]$.

Démonstration. Supposons que θ_φ a ses dérivées continues. $\theta'_\varphi(u_{c_1}) = 0$ et $\theta'_\varphi(u_{c_2}) = 0$ par définition 1. Par conséquent, la fonction θ'_φ ne peut pas changer de signe dans l'intervalle I sans passer par un point critique, ce qui contredit le fait qu'il n'y ait pas de points critiques dans I . \square

Grâce à la proposition 6, nous obtenons les résultats suivants :

Proposition 7. Soit un intervalle ouvert $I = [u_{c_1}; u_{c_2}]$ entre deux points critiques successifs, il existe alors un maximum de 4 solutions à l'équation (11) dans I .

Démonstration. Considérons un point $u_0 \in I$ et une solution θ_+ de l'équation (11) où $\theta_+(u_0) > 0$ et $\theta'_+(u_0) > 0$. Grâce à la proposition 6, θ'_+ ne change pas de signe dans I et est une solution de l'équation (11) :

$$\theta' = \sqrt{1 - \xi\theta^2}. \quad (30)$$

Nous considérons la dérivée partielle de (30) en fonction de θ pour vérifier que ψ est lipschitzienne sur I :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{-\xi\theta}{\sqrt{1 - \xi\theta^2}}. \quad (31)$$

I est un intervalle fini et le dénominateur de (31) ne s'annule pas sur I . ψ' est bornée et donc ψ est une fonction lipschitzienne. Soit $\epsilon > 0$ tel que $I_{u_0} = [u_0 - \epsilon; u_0 + \epsilon]$, $u_0 - \epsilon > u_{c_1}$ et $u_0 + \epsilon < u_{c_2}$. Notons que I_{u_0} existe toujours si ϵ est suffisamment petit. D'après le théorème de PL, la solution θ_+ est unique dans I_{u_0} . En répétant ce raisonnement pour tous les points $u_0 \in I$, nous démontrons que la solution θ_+ est unique dans I . De la même manière pour θ_- où $\theta_-(u_0) > 0$ et $\theta'_-(u_0) < 0$, nous utilisons le théorème de PL pour l'EDO $\theta' = -\sqrt{1 - \xi\theta^2}$. Nous obtenons alors que, si θ_- existe, alors θ_- est unique dans I . Nous prenons en compte les solutions virtuelles (avant la rétine) de θ_+ et θ_- , ce qui donne un total de 4 solutions possibles dans l'intervalle I . \square

Il est à noter que désormais seules les solutions positives, *i.e.* réelles, sont considérées. Grâce à la proposition 7, nous pouvons déduire la borne supérieure du nombre de solutions à partir du nombre de points critiques.

Corollaire 1. Soit N le nombre de points critiques dans \mathcal{T} , il y a $M \leq 2^N - 1$ solutions possibles à l'équation (4).

Démonstration. D'après la proposition 7, il y a 2 solutions possibles pour chaque intervalle borné par deux points critiques consécutifs. D'après la proposition 3, ces solutions s'intersectent aux points critiques. Ainsi, les solutions de l'équation (4) sont constituées de morceaux de courbes connectés aux points critiques. Pour N points critiques, il y a $M \leq 2^N - 1$ combinaisons possibles. \square

5 Calcul des solutions

Notre approche s'appuie sur le fait qu'une solution est nécessaire pour trouver les points critiques et calculer la seconde solution. Notre méthode de IDSfT est composée de 4 étapes principales, représentées dans la figure 2 :

1. **Initialisation** : nous proposons ici deux méthodes. La première méthode suppose que la solution à l'équation (4) est infinitésimalement linéaire. La seconde méthode s'appuie sur le MDH qui aboutit à une optimisation sur le cône du second ordre.
2. **Raffinement** : nous utilisons une paramétrisation isométrique de la solution et une optimisation non-linéaire pour raffiner la solution obtenue à l'étape précédente. Une initialisation précise est requise pour cette deuxième étape.
3. **Points critiques** : nous utilisons les propriétés des points critiques pour les détecter dans la solution raffinée. La référence \mathcal{T} est ainsi découpée en intervalles entre chaque point critique consécutif. Pour chaque intervalle, il y a 4 solutions.
4. **Trouver toutes les solutions** : nous utilisons le raffinement pour trouver toutes les solutions dans chaque intervalle en forçant toutes les combinaisons possibles de signe de θ et θ' .

5.1 Initialisation

Solutions non-holonomes approchées. Nous pouvons initialiser le raffinement grâce à une solution analytique. Nous montrons que le problème du IDSfT peut être résolu localement et analytiquement si nous supposons que la courbe déformée \mathcal{S} est infinitésimalement linéaire. Cela revient à considérer \mathcal{S} comme une succession de droites infinitésimalement petites, *i.e.* pour tout $u \in \mathcal{T}$, $\varphi''(u) = \mathbf{0}$. Grâce à la proposition 1 et en dérivant l'équation (7), nous aboutissons à un système de 2 inconnues et 2 équations :

$$\begin{aligned} (\varphi'_y \varepsilon + \varphi_y \varepsilon')^2 - \varphi_y'^2 \varepsilon'^2 + \varphi_y^2 \eta'^2 &= 1 \\ 2(\varphi_y')^2 \eta \eta' + \varphi_y \varphi_y' (2(\eta')^2 + \eta \eta'') + \varphi_y^2 \eta' \eta'' &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

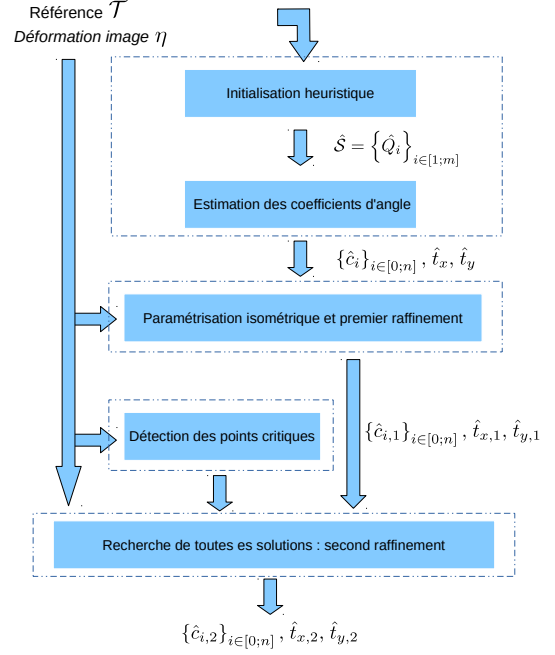


FIGURE 2 – Méthode proposée pour résoudre le IDSfT.

En éliminant φ'_y des deux équations (32), nous avons deux solutions pour φ_y :

$$\varphi_y = \pm \frac{2\eta'}{\sqrt{(-\eta''\eta + 2(\eta')^2)^2 + (-\eta'')^2}}. \quad (33)$$

L'hypothèse utilisée peut être généralisée aux ordres supérieures, en supposant que pour $u \in \mathcal{T}$, $\varphi^{(k)}(u) = \mathbf{0}$ avec $k > 2$. Localement, φ devient alors un polynôme d'ordre fini. Toutefois, pour des ordres $k > 2$, nous ne pouvons pas trouver de solutions analytiques et la résolution d'un système polynômiale devient nécessaire. Nous conservons la solution positive. La première et deuxième dérivées de η sont calculées à partir d'une approximation polynômiale.

Maximum Depth Heuristic. La relaxation de la contrainte d'isométrie [13] s'appuie sur trois points. Il s'agit d'une optimisation sur le cône du second ordre (SOCP). Cette technique déplace les points 2D \hat{Q}_i le long de chaque ligne de vue, préservant ainsi la contrainte de reprojection. Elle maximise la profondeur des points 2D de telle sorte qu'elle soit inférieure ou égale à la distance géodésique entre les points 1D équivalents dans \mathcal{T} :

$$\|\hat{Q}_i - \hat{Q}_j\|_2 \leq |u_i - u_j|. \quad (34)$$

5.2 Paramétrisation isométrique et raffinement

Une contribution de notre travail est la paramétrisation isométrique du plongement. Une telle paramétrisation est très

délicate pour les objets 3D, mais le 1DSfT nous permet de l'essayer dans un cadre plus simple. Nous supposons que la référence \mathcal{T} est composée de m marqueurs espacés d'une distance $l = \{l_i\}_{i \in [1; m-1]}$ entre chaque marqueur. Au lieu de contraindre l'isométrie lors du raffinement, le plongement recherché est isométrique par construction. Pour cela, il utilise une fonction d'angle $\alpha : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall u_i \in \mathcal{T}, \quad \varphi(u_i) = l \sum_{j=1}^i \begin{pmatrix} \cos \alpha(u_j) \\ \sin \alpha(u_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}, \quad (35)$$

avec $\alpha(u_j) = \sum_{k=0}^n u_j^k c_k$, un polynôme de degré n . Le plongement est ainsi défini par $n + 3$ paramètres : la forme et la position 2D du premier point, $\{c_i\}_{i \in [0; n]}$, t_x et t_y . Nous vérifions que $\|\varphi'\|_2^2 = 1$. Le raffinement est réalisé par une optimisation non-linéaire au sens des moindres carrés d'une fonction de coût qui comprend uniquement la contrainte de reprojection. Il s'agit d'une minimisation de l'erreur entre les données mesurées et estimées en fonction des paramètres du plongement.

$$\varepsilon_d(c_0, \dots, c_n, t_x, t_y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| f \begin{pmatrix} \varphi_x(u_i) \\ \varphi_y(u_i) \end{pmatrix} - \eta(u_i) \right|^2. \quad (36)$$

6 Résultats expérimentaux

Nous avons évalué nos méthodes sur des données simulées et réelles. Nous nous intéressons à la précision de la méthode. Nous avons calculé l'erreur relative sur la contrainte d'isométrie et de reprojection, et sur la forme 2D de l'objet. De la même manière qu'en 2DSfT, nous avons testé notre méthode en faisant varier le bruit sur l'image 1D, la forme de l'objet 2D et le nombre de correspondances de points.

6.1 Détails d'implémentation

Nous avons utilisé MATLAB pour réaliser les expériences avec YALMIP [2] et SeDuMi 1.3 [1] pour implémenter le MDH. Nous réalisons le premier raffinement grâce à la fonction `lsqnonlin` et le second grâce à la fonction `fmincon` pour contraindre le signe de θ' .

6.2 Données synthétiques

Une caméra perspective est utilisée et les coordonnées de la référence sont normalisées. Afin de contrôler la forme de l'objet, nous avons utilisé la courbure d'une ligne, *i.e.* l'inverse du rayon d'un arc. Tout d'abord, nous avons comparé le MDH et la solution analytique (§5.1). La figure 3 présente les erreurs de reconstruction de la courbe déformée en fonction de trois paramètres. On remarque que l'augmentation du nombre de correspondances permet une meilleure reconstruction. Pour tester la courbure, nous avons simulé un arc de 50 points avec un bruit additif gaussien de $\sigma = 0.1\%$ introduit dans les correspondances 1D. Nous avons observé que le MDH est plus robuste aux fortes déformations que la solution analytique, comme le montre

la figure 3. Nous avons ensuite considéré une forte courbure pour tester la sensibilité au bruit et au nombre de correspondances : c'est pourquoi, nous n'avons plus pris en compte la solution analytique pour les deux autres expériences.

L'étude sur le bruit montre que la paramétrisation angulaire dans les raffinements permet de palier, jusqu'à un certain niveau de bruit, aux erreurs faites par le MDH pour l'initialisation. Nous avons noté pour le MDH de très faibles erreurs de reprojection et de grandes erreurs pour l'isométrie, ce qui s'explique par le fait que les points 2D se déplacent sur les lignes de vue et par la relaxation de la contrainte d'isométrie. Le MDH présente aussi de grosses erreurs à partir d'un certain niveau de bruit, ce qui fournit une mauvaise initialisation pour le premier raffinement. Celui-ci fournit alors une mauvaise solution. Comme le second raffinement force le changement de signe de θ' de cette solution, les deux raffinements ne permettent pas d'obtenir des solutions proches de la vérité terrain.

6.3 Données réelles

Les données réelles sont obtenues grâce à la reconstruction 3D d'une feuille courbée. La figure 4 présente celle utilisée pour les expériences : nous avons voulu reconstruire la ligne centrale indiquée en cyan. Deux types de photos sont prises : une photo dont l'image 1D est extraite et un ensemble de photos pour reconstruire en 3D la feuille et en extraire une coupe 2D. Nous avons pris des images de taille 4800×3200 px. Nous avons utilisé le logiciel Agisoft PhotoScan [3] pour reconstruire en 3D la feuille courbée. Nous avons réalisé 7 types de déformations douces, sans occultations et réalisées horizontalement comme l'illustre la figure 4.

La figure 4 présente de bonnes erreurs relatives pour la forme de la courbe (moins de 1%). Pour tous les exemples, nous avons obtenu deux solutions pour la courbe. Dans la figure 4, l'exemple illustre bien que le second raffinement a inversé le signe de θ' dans les deux intervalles délimités par un point critique. Le dernier graphique de la figure 3 souligne la présence d'un point critique au milieu de la courbe et on peut bien observer que le second raffinement fournit une solution dont la première dérivée est de signe opposé à celle de la première solution.

7 Conclusion

Nous avons présenté une étude théorique du 1DSfT isométrique et son implémentation. Le 1DSfT révèle sa complexité à travers l'analyse de son EDO. Nous avons introduit la notion de points critiques qui bornent l'espace des solutions. Nous avons prouvé que les solutions localement exactes du 1DSfT n'existent pas et que le 1DSfT ne possède pas de solution unique. Nous avons alors présenté une méthode de résolution basée sur une initialisation convexe et suivie de deux raffinements non-convexes. Une de nos contributions est la paramétrisation angulaire des solutions isométriques. Les données simulées et

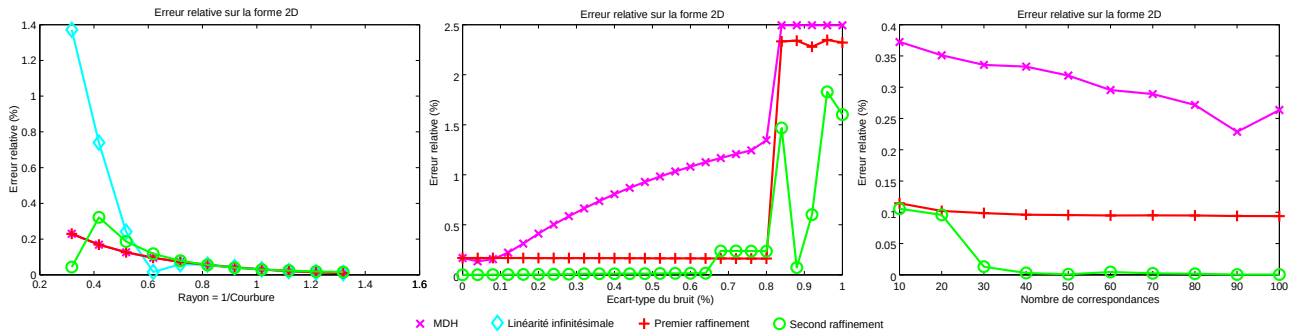


FIGURE 3 – Données simulées. Nous montrons ici l'influence de trois paramètres importants pour le 1DSfT. Pour les expériences sur le bruit et le nombre de correspondances, les résultats de la solution analytique sont hors du graphe.

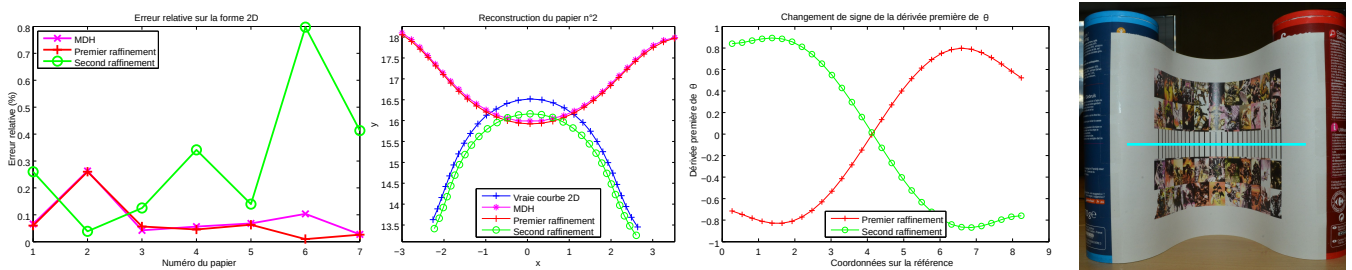


FIGURE 4 – Données réelles. Évaluation des résultats obtenues par notre méthode - Exemple de résultats avec des données réelles - Changement de signe de θ' - Image utilisée pour extraire l'image 1D.

réelles fournissent des résultats encourageants, mais une évaluation plus rigoureuse sera nécessaire pour considérer des déformations complexes et différentes conditions d'acquisition. Une perspective de ce travail pourrait être le 1DSfT pour des tranches plus complexes d'objet 3D. Une seconde perspective serait le 2DSfT avec des courbes.

Remerciements. Cette étude est financée par la subvention du Conseil européen de la recherche (ERC) 307483 FLEXABLE.

Références

- [1] SeDuMi 1.3. <http://sedumi.ie.lehigh.edu>.
- [2] YALMIP version 19-June-2014. <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip>.
- [3] Agisoft PhotoScan 1.0.4, 2014.
- [4] E. A. Abbott. *Flatland : A Romance of Many Dimensions*. Seely & Co., 1886.
- [5] A. Bartoli. Maximizing the predictivity of smooth deformable image warps through cross-validation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 31(2-3) :133–145, 2008.
- [6] A. Bartoli, Y. Gérard, F. Chadebecq, and T. Collins. On template-based reconstruction from a single view : Analytical solutions and proofs of well-posedness for developable, isometric and conformal surfaces. In *CVPR*, 2012.
- [7] F. Brunet, R. Hartley, and A. Bartoli. Monocular template-based 3D surface reconstruction : Convex inextensible and

- nonconvex isometric methods. *Computer Vision and Image Understanding*, 125 :138–154, 2014.
- [8] A. Chhatkuli, D. Pizarro, and A. Bartoli. Stable template-based isometric 3D reconstruction in all imaging conditions by linear least-squares. In *CVPR*, 2014.
- [9] Y. Dai, H. Li, and M. He. A simple prior-free method for non-rigid structure-from-motion factorization. *International Journal of Computer Vision*, 107(2) :101–122, 2014.
- [10] A. Del Bue, X. Llado, and L. Agapito. Non-rigid metric shape and motion recovery from uncalibrated images using priors. In *CVPR*, 2006.
- [11] Y. Eliashberg and N. M. Mishachev. *Introduction to the h-Principle*. Number Grad. Stud. Math. 48. American Mathematical Society, 2002.
- [12] A. Malti, R. Hartley, A. Bartoli, and J. Kim. Monocular template-based 3D reconstruction of extensible surfaces with local linear elasticity. In *CVPR*, 2013.
- [13] M. Perriollat, R. Hartley, and A. Bartoli. Monocular template-based reconstruction of inextensible surfaces. In *BMVC*, 2008.
- [14] M. Salzmann and P. Fua. Linear local models for monocular reconstruction of deformable surfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33(5) :931–944, 2011.